حساب الاحتمالات.

← المبدأ الأساسي للعداد:

المبدأ:

نعتبر وضعية تعدادية مكونة من p اختيار C_1 و C_2 و ... C_p.

إذا كان الاختيار الأول C_1 يتم بـ n_1 كيفية و C_2 يتم بـ n_2 كيفية ... و C_p يتم بـ n_p كيفية. فإن عدد الكيفيات التي تتم بها هذه الوضعية هو:

$$n_1 \times n_2 \times \dots n_p.$$

مثال

الرمز السري لبطاقة الصراف يتكون من 4 أرقام.

- عدد الأرقام السرية الممكنة هو:

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10,000$$

- عدد الأرقام السرية المكونة من أعداد زوجية تختلف:

$$5 \times 2 \times 2 \times 2 = 625.$$

- عدد الأرقام السرية المختلفة هو:

$$10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

تمرين: (5)

كلمة السر لحاسوب محمول هي كلمة مكونة من 3 حروف عربية.

1 ـ حدد عدد كلمات السر الممكنة.

2 ـ ما هو عدد كلمات السر المكونة من أحرف مختلفة مثنى مثنى (كل حرفين مختلفين).

← الترتيبات Arrangements.

تعريف:

لتكن E مجموعة مكونة من n عنصر $n \in \mathbb{N}^*$

- لكل عنصر $(x_1, x_2 \dots x_p)$ حيث x_1 و ... x_p عناصر مختلفة من E تسمى ترتيبة (بدون تكرار) لـ p عنصر من E.

← ملاحظة:

ترتيب العناصر هو كل ترتيبة مختلفة.

خاصية:

- عدد الترتيبات بتكرار لـ p عنصر من E (نقول أيضا: عدد ترتيبات بتكرار لـ p من أصل n) هو: n^p.
- عدد الترتيبات بدون تكرار لـ p عنصر من n هو $n(n-1) \dots (n-p+1)$

نرمز لهذا العدد بـ A_n^p.

مثال (1):

نعتبر المجموعة: $E = \{1, 2, 3, 4\}$

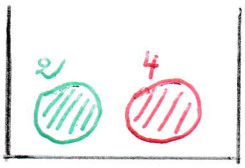
نريد اختيار رقمين:

← بتكرار: $4 \times 4 = 4^2 = 16$

← بدون تكرار: $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$

← ملاحظة: عدد عوامل A_n^p هو p.

مثال (2)



نعتبر صندوقا يحتوي على 4 كرات لها ألوان مختلفة (2 كريتي و 2 خضراوين).

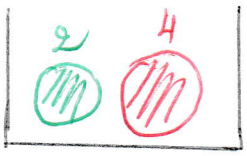
(1) ← نقول أننا نسحب من الصندوق بالتتابع وبدون إرجاع أي نختار كريتين من الصندوق ولا نرجع كل كرة معنية.

← نسحب كريتين بالتتابع وبدون إرجاع يعني سحب كرة ثم سحب كرة أخرى دون إرجاع الكرة الأولى.

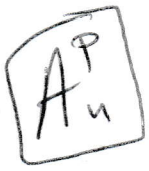
← هذا يعني أن الكرات المعنية تمثل ترتيبة بدون تكرار.

← في حالة السحب بالتتابع وبدون إرجاع نستعمل العلاقة A_n^p.

p : عدد الكرات المسحوبة.
p من أصل n.



← سحب كريتين بالتتابع وبدون إرجاع.



• عدد الحالات الممكنة:
هو اختيار كريتين من أصل 6
إذن $A_6^2 = 6 \times 5 = 30$.

• عدد الإمكانيات سحب كريتين خضراوين:
هو اختيار كريتين من أصل اثنتين:
$A_2^2 = 2 \times 1 = 2$.

• عدد الإمكانيات سحب كريتين حمراوين.
$A_4^2 = 4 \times 3 = 12$.

② نقول أننا سحبنا بالتتابع وبإرجاع إذا أننا سحبنا من الصندوق الكرات تباعا ثم نعيد الكرة بعد سحبها. أي أنه يمكن إعادة سحب الكرة.

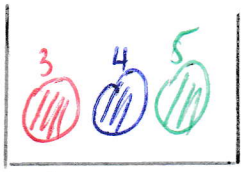
← نعتبر نفس الصندوق السابق:

• سحب بالتتابع وبإرجاع كريتين.
عدد الإمكانيات الممكنة هو $6^2 = 36$

• عدد إمكانيات سحب كريتين خضراوين هو:
$2^2 = 4$

• عدد إمكانيات سحب كريتين لا خضراوين هو:
$4^2 = 16$.

تطبيق: ①



نعتبر الصندوق التالي:

1 ـ نسحب بالتتابع وبدون إرجاع ثلاث كرات.
أ ـ ما هو عدد الإمكانيات؟
ب ـ عدد إمكانيات سحب كريتين خضراوين.
ج ـ " " سحب كرات لها نفس اللون.
2 ـ نفس الأسئلة في حالة السحب بالتتابع وبإرجاع.

← الرمز $n!$ ـ التأليفات:

ـ الرمز $n!$:
خاصية وتعريف:
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا و غير معدوم.
عدد ترتيبات لـ n عنصر بدون تكرار من أصل n هو العدد $A_n^n = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 2 \times 1$
نرمز لهذا العدد بـ $n!$ ونقرأ: n عاملي:
$A_n^n = n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$.

← نعلم أن: $0! = 1$ و $1! = 1$

مثال:
عدد ترتيب 5 تلاميذ في 5 كراسي هو:
$A_5^5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

خاصية:
$\forall n, p \in \mathbb{N}, \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

← التأليفات:
التعريف:
ليكن E مجموعة من n عنصر وليكن p عددا صحيحا طبيعيا بحيث $p \leq n$.
كل جزء مكون من p عنصر من عناصر E يسمى تأليفة لـ p عنصر من أصل n.

مثال:
نعتبر المجموعة $E = \{1,2,3,4,5\}$
الجزء $\{1,2\}$ تأليفة لعنصرين من E،
الجزء $\{2,4,5\}$ تأليفة لثلاثة عناصر من E.

← ملاحظة:
• ترتيب العناصر في مجموعة ليس مهما.
• كل تأليفة لـ p عنصر من بين n هي ترتيب، وبما أن الترتيب ليس مهما، فإنه ما عدد $p!$ ترتيبة يوجد ما يكافئ تأليفة لـ p عنصر من أصل n.

خلاصة:

n و p عددان صحيحان طبيعيان و $p \leq n$.

عدد التأليفات لـ p عنصر من بين n هو العدد $\frac{A_n^p}{p!}$ والذي نرمز له بـ C_n^p.

نتائج:

$\forall n, p \in \mathbb{N}, p \leq n$. $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

$C_n^1 = n$ و $C_n^n = C_n^0 = 1$

مثال ①

نعتبر المجموعة $E = \{1, 2, 3, 4\}$

← $\{2,1\}$ و $\{4,3\}$ تأليفتين لعنصرين من أصل 4.

← التأليفة $\{3,4\}$ هي نفسها التأليفة $\{4,3\}$. بينما الترتيبة $(4,3)$ تخالف الترتيبة $(3,4)$ لأن الترتيب في الترتيبات مهم.

← عدد الترتيبات الممكنة لعنصرين من بين 4 بدون تكرار هو $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$

• وعدد التأليفات الممكنة لعنصرين من أصل 4 هو:

$$C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{12}{2 \times 1} = 6$$

← عدد التأليفات الثلاثية عناصر من الـ 4 هو:

$$C_4^3 = \frac{A_4^3}{3!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2} = 4.$$

← عدد التأليفات الممكنة لرتبة عناصر من أصل 4 هو:

$C_4^4 = 1$.

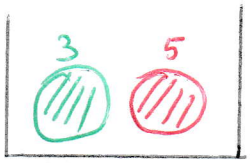
مثال ②

$C_5^2 = \frac{A_5^2}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$: لدينا

$C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$

$A_9^1 = 9 \Rightarrow C_9^1 = \frac{A_9^1}{1!} = \frac{9}{1} = 9$

مثال ③



نعتبر الصندوق التالي:

سنحسب بتأنيا كريتين بيانيا

أننا سنحسب عددا أن واحدا (وقتا واحدا) كريتين.

← عند ما سنحسب كريتين حمراء وخضراء مثلا فإن الكريتين متمايزتين مهم نقول أن كل عملية هي تأليفة للكريتين.

إذن عند ما سنحسب كريتين تأنيا فإن عدد السحبات الممكنة هو: $C_8^2 = \frac{A_8^2}{2!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$

← عدد السحبات الممكنة للحصول على كريتين خضراوتين هو:

$C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$

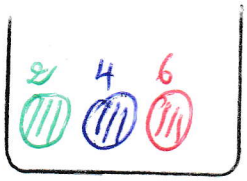
← عدد السحبات الممكنة للحصول على كريتين حمراوتين هو:

$C_5^2 = \frac{A_5^2}{2!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$.

خلاصة:

نوع السحب	أهمية الترتيب	العلاقة
بالتتابع وبدون إحلال	الترتيب مهم والتكرار غير وارد	A_n^p
بالتتابع وبإحلال	الترتيب مهم والتكرار وارد	n^p
تآنيا	الترتيب غير مهم والتكرار غير وارد	C_n^p

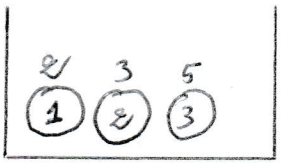
تطبيق ②



نعتبر الصندوق التالي:
نسحب عشوائيا ثلاث كرات.

1 - حدد عدد السحبات الممكنة.
2 - حدد عدد السحبات الممكنة التي تكون
أ - كل الكرات خضراء.
ب - كل الكرات حمراء.
ج - كل الكرات زرقاء.
د - كرة حمراء وكرتين خضراويتين.

تطبيق ③



نعتبر الصندوق التالي:
- كرتين تحملان الرقم 1.
- ثلاث كرات تحمل الرقم 2.
- خمس كرات تحمل الرقم 3.

نسحب كرتين تتابعيا

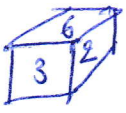
1 - ما هو عدد السحبات الممكنة.
2 - حدد عدد سحبات الممكنة بسحب كرتين تحملان الرقم 3.
3 - حدد عدد الحالات بسحب كرتين تحملان الرقم 2.
4 - نفس الأسئلة في حالة السحب بالتتابع وبدون إرجاع
5 - نفس الأسئلة في حالة السحب بالتتابع وبدون إرجاع

← التجارب العشوائية: مصطلحات.

1 - تجربة عشوائية:

* نسمي تجربة عشوائية كل تجربة لها أكثر من إمكانية واحدة ولكن نتوقع نتيجتها قبل إجرائها.

← مثال



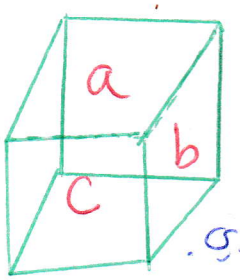
← عند القاء زهر ذو ستة أوجه نقدية فإننا نعرف النتيجة التي سنحصل عليها نقول أن القاء الزهر تجربة عشوائية.

← مصطلحات:

* المجموعة Ω المكونة من جميع النتائج الممكنة في تجربة عشوائية تسمى كون الإمكانيات.
* كل عنصر من Ω يسمى إمكانية.
* كل جزء من Ω يسمى حدثا، ونقول الحدث A يتحقق الحصول - عند إجراء التجربة - على إمكانية x تنتمي إلى المجموعة A، فنقول أن x تحقق الحدث A.
* العناصر التي تنتمي لـ Ω ولا تنتمي لـ A تكون جزء من Ω يسمى: الحدث المضاد لـ A ونرمز له بـ $\overline{A}$.
* المجموعة Ω تسمى الحدث الأكيد (كل الإمكانيات تحقق Ω).
* الجزء الفارغ $\emptyset$ يسمى الحدث المستحيل (لا توجد أي إمكانية تحقق $\emptyset$).

كل حدث مكون من عنصر واحد يسمى حدثا ابتدائيا

← مثال



نعتبر زهرا ذو الوجه الحروف a, b, c, d, e, f

نهتم بالحرف الظاهر على الوجه العلوي.

لدينا: كون الإمكانيات هو:

$\Omega = \{a, b, c, d, e, f\}$

نعتبر الحدث:

A: "الحصول على حرف متحرك" Voyelle

لدينا:

$A = \{a, e\}$

← الحدث المضاد لـ A هو:

$\overline{A} = \{b, c, d, f\}$

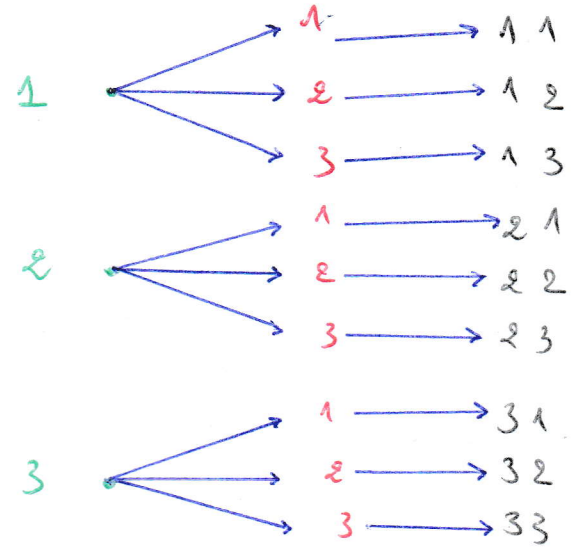
← الأحداث $B = \{b\}$ و $C = \{c\}$ تسمى أحداثا ابتدائية.

تمرين 4 الإمكانيات :

تقديم :

نريد تكوين رقم سري من الأعداد التالية 1, 2, 3 ، الرقم السري سيكون من رقمين :

الأرقام السرية الممكنة	الرقم الثاني	الرقم الأول :



ومنه كون الإمكانيات هو :

$$\Omega = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}$$

← إحتمال حدث :

- استقرار تردد حدث :

نعتبر تجربة عشوائية كون إمكانياتها $\Omega = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ و $n \in \mathbb{N}^*$.

عندما نعيد هذه التجربة عدد F كبير من المرات فإن تردد الإمكانية x_i ($1 \leq i \leq n$) يؤول تدريجيا الى الاستقرار عند قيمة p_i.

العدد p_i يمثل احتمال الحدث الابتدائي x_i.

ونكتب : $P(\{x_i\}) = p_i$.

تعريف :

ليكن Ω كون إمكانيات تجربة عشوائية .

احتمال حدث A هو مجموع احتمالات الأحداث الابتدائية التي تحقق A ونرمز له بـ $P(A)$.

← العلاقة التي تربط كل حدث A بالعدد $P(A)$ تسمى إحتمال على كون الإمكانيات Ω .

ملاحظات :

← بما أن المجموعة الفارغة $\emptyset$ تحتوي على أية إمكانية فإن $P(\emptyset) = 0$.

← بما أن كل الإمكانيات تحقق الحدث Ω فإن $P(\Omega) = 1$.

← لدينا : $(\forall A \in \Omega) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$

مثال :

نعتبر كون الإمكانيات : $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$

نعرف احتمال على الكون Ω بما يلي :

$P(\{a\}) = 0,1$ ، $P(\{b\}) = 0,2$ ، $P(\{c\}) = 0,3$

$P(\{d\}) = 0,3$ ، $P(\{e\}) = 0,1$.

نعتبر الأحداث :

$A = \{a, b, c\}$ ، $B = \{a, e\}$

$C = \{d, e\}$

لدينا :

$P(A) = 0,1 + 0,2 + 0,3 = 0,6$ /

$P(B) = 0,1 + 0,1 = 0,2$

$P(C) = 0,3 + 0,1 = 0,4$

لدينا كذلك اذن نلاحظ أن

$\overline{A} = \{d, e\} = C$

$P(\overline{A}) = 0,3 + 0,1 = 0,4$ /

$P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

2- فرضية تساوي الاحتمالات:

مبرهنة:

إذا كانت كل الحالات الابتدائية متساوية الاحتمالات فإن كون الإمكانيات Ω و A حدث من Ω لدينا:

$$P(A) = \frac{\text{عدد الإمكانيات التي تحقق } A}{\text{عدد إمكانيات } \Omega}$$

البرهان:

ليكن Ω كون إمكانيات غير متوافقة و:

$$\Omega = \{x_1, x_2 \dots x_n\} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

ليكن $A \subset \Omega$ و $A = \{x_1, x_2 \dots x_m\}$

إذا كانت فرضية تساوي الاحتمالات محققة لأن جميع الحالات الابتدائية لها نفس الاحتمال، فإن:

$$P(\{x_1\}) = P(\{x_2\}) = \dots = P(\{x_n\}) = \frac{1}{n}$$

ومنه:

$$P(A) = P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + \dots P(\{x_n\})$$

$$= \frac{1}{n} \times m = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

مثال ①

← ملاحظة:

1/ ليكن Ω كون إمكانيات غير متوافقة منتهية.

نرمز لعدد عناصر Ω بالرمز $\text{Card}\,\Omega$

ونقرأ: رتيبي المجموعة Ω: $\text{Cardinal}\,\Omega$

ونرمز لعدد عناصر A بـ $\text{Card}\,A$

فيصبح:

$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega}$$

2/ للإشارة على تحقق فرضية تساوي الاحتمالات:

نقول إننا نرمي نردا غير مغشوش، أو أن الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

مثال ①

نرمي نردا غير مغشوش مرقم من 1 إلى 6.

لدينا: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

النرد غير مغشوش يعني أن فرضية تساوي الاحتمالات محققة.

إذن $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

ليكن الحدث A: "الرقم الظاهر على النرد أولي".

$A = \{2, 3, 5\}$

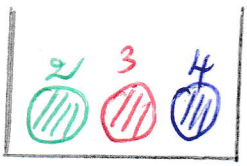
و B: "الرقم الظاهر على النرد مضاعف لـ 3"

$B = \{3, 6\}$

لدينا: $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

و $P(B) = \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مثال ②:



نعتبر الصندوق التالي:

يحتوي على الصندوق كريتين متماثلتين.

نعتبر الحوادث:

R: "سحب كريتين حمراوين".

V: "سحب كريتين خضراوين".

B: "سحب كريتين زرقاوين".

لدينا:

عدد الإمكانيات هو:

$$\text{Card}(\Omega) = C_9^2 = \frac{A_9^2}{2!} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

عدد إمكانيات سحب كريتين حمراوين:

$$\text{Card}(R) = C_3^2 = \frac{A_3^2}{2!} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$$

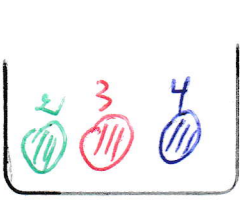
إذن احتمال R هو:

$$P(R) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

بالمثل: عدد إمكانيات سحب كريتين خضراوين هو:

$$\text{Card}(V) = C_2^2 = 1 \Rightarrow P(V) = \frac{1}{36}$$

← في حالة السحب بالتتابع



وبدون إحلال:

(سحب كرتين):

R: "الكرتين المحوبتين حمراوين"

V: "الكرتين خضراوين"

B: "الكرتين زرقاوين"

لدينا: عدد الحالات هو:

$Card(\Omega) = A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

• عدد امكانيات سحب كرتين حمراوين هو:

$Card(R) = A_3^2 = 3 \times 2 = 6$

$P(R) = \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$ إذن:

• عدد امكانيات سحب كرتين خضراوين هو:

$Card(V) = A_2^2 = 2 \times 1 = 2$

$P(V) = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$ إذن:

• عدد امكانيات سحب كرتين زرقاوين هو:

$Card(B) = A_4^2 = 4 \times 3 = 12$

$P(B) = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$ إذن:

⚠ لنحسب الآن احتمال الحدث:

A: "سحب كرة خضراء و كرة زرقاء"

السحب يتم بالتتابع وبدون إحلال

إذن فإننا نضرب في معامل الترتيب

← في حالة السحب بالتتابع بإحلال

أو بدون إحلال، فإنه عند سحب كرتين أو ثلاث أو أكثر مختلفة اللون، فإننا نضرب في معامل الترتيب.

← في حالة سحب كرتين متفقي اللون

معامل الترتيب هو 2.

← في حالة سحب ثلاث كرات، كرتين لهما نفس اللون وأخرى مختلفة، فإن معامل الترتيب هو 3.

← في حالة سحب ثلاث كرات: كلها مختلفة اللون مثنى مثنى، فإن معامل الترتيب في هذه الحالة هو 6.

خلاصة:

معامل الترتيب هو 6	معامل الترتيب هو 3	معامل الترتيب هو 2

إذن: ليكن

A: "سحب كرة خضراء و كرة زرقاء"

$Card(A) = 2 \times A_2^1 \times A_4^1 = 2 \times 2 \times 4$

$= 16$

$\Rightarrow P(A) = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$

ليكن: C: "سحب كرة حمراء واحدة على الأقل"

C تعني سحب كرة حمراء واحدة وكرة غير حمراء أو سحب كرتين حمراوين.

إذن:

$Card(C) = 2 \times A_3^1 \times A_6^1 + A_3^2$

$= 2 \times 3 \times 6 + 3 \times 2 = 36 + 6 = 42$

$\Rightarrow P(C) = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$.

ليكن D : "سحب كرة زرقاء واحدة على الأكثر"
الحدث D يعني أن سحب كرة زرقاء واحدة
وأخرى غير زرقاء ، أو أن سحب كريتين
كلتاهما ليست زرقاء.

إذن :

$$Card(D) = \mathcal{E}\, A_4^1 \times A_5^1 + A_5^2$$

$$= 2 \times 4 \times 5 + 5 \times 4 = 40 + 20$$

$$= 60 \Rightarrow P(D) = \frac{60}{72} = \frac{25}{36}$$

← لنحسب احتمال D في حالة السحب تآنيا:

لدينا :

$$Card(D) = C_4^1 \times C_5^1 + C_5^2$$

$$= 4 \times 5 + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 20 + \frac{20}{2} = 30$$

$$Card(\Omega) = C_9^2 = \frac{A_9^2}{2!} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

$$\Rightarrow P(D) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}.$$

(ملاحظة: الكريات غير مميزة لذلك لم نضرب في معامل التبديل).

← لنحسب احتمال D في حالة السحب بالتتابع وبإحلال : n^p

$$Card(D) = 4^1 \times 5^1 \times 2 + 5^2$$

$$= 40 + 25 = 65$$

$$\Rightarrow P(D) = \frac{65}{81} \quad \frac{Card D}{Card \Omega} = \frac{65}{81}.$$

$$Card(\Omega) = 9^2 = 81$$

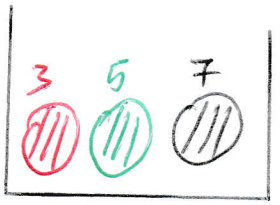
← احتمال V في حالة السحب تآنيا:

$$P(V) = \frac{Card(V)}{Card(\Omega)} = \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{1}{36}$$

← احتمال A في حالة السحب تآنيا:

$$P(A) = P(\text{●●}) = \frac{C_2^1 \times C_4^1}{C_9^2} = \frac{2 \times 4}{36} = \frac{2}{9}$$

التطبيق (4)



نعتبر الصندوق المثالي الذي يحتوي على كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس :

I/ سحب بالتتابع وبدون إحلال كريتين

1 - ما هو عدد الإمكانيات ؟.

2 - احسب احتمال الحدث التالية :

R : "الكريتين المسحوبتين حمراوين".

V : "الكريتين المسحوبتين خضراوين".

N : "الكريتين المسحوبتين سوداوين".

A : "كرة حمراء وكرة سوداء"

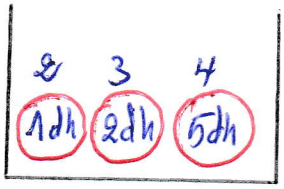
B : "كرة خضراء واحدة فقط".

(الكرة الثانية غير خضراء).

II/ أجب عن نفس الأسئلة في حالة السحب بالتتابع وبإحلال.

III/ نعتبر نفس الصندوق، نسحب الآن ثلاث كرات تآنيا، احسب احتمال الحدث R و V و N

تطبيق (5)



نعتبر كيسا يحتوي على قطع نقدية من فئة الدرهم لا يمكن التمييز بينها باللمس.

(4 قطع من فئة 5 دراهم / 3 قطع من فئة درهمين / قطعتين من فئة درهم واحد).

نسحب تآنيا كريتين.

1 - احسب احتمال الحدث التالية:

A : "الحصول على مبلغ 7 دراهم".

B : "الحصول على مبلغ 4 دراهم".

2 - احسب P(A) و P(B) في حالة السحب بالتتابع بإحلال ثم بدون إحلال.